ملاحظة:

إذا كان $Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ أو $Z_1 = re^{i\theta_1}$

$Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ أو $Z_2 = re^{i\theta_2}$

عندئذ $Z_1 = Z_2$ إذا وفقط إذا كان:

$$r_1 = r_2 \wedge \theta_1 = \theta_2 + 2n\pi \quad ; n = \mp 1, \mp 2, \dots$$

$$z_1 = x_1 + iy_1 \wedge z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_1 = z_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

جذور الأعداد العقدية:

ليكن Z عدد عقدي غير صفري ونقول عن العدد العقدي

$$w = u + iv$$

أنه جذر من المرتبة n للعدد العقدي Z إذا وفقط إذا كان w يحقق العلاقة $Z = w^2$

والتي تكتب بالشكل: $w = \sqrt[n]{Z} = (Z)^{\frac{1}{n}}$

إذا وضعنا $Z = |Z| e^{i\theta}$, $w = |w| e^{iv}$

بالاستفادة من العلاقة $Z = w^n$ عندئذ:

$$|w|^n \cdot e^{inv} = |Z| \cdot e^{i\theta}$$

وبالاستفادة من تساوي عددين عقديين ينتج أنه:

$$|w|^n = |Z| \wedge nv = \theta + 2k\pi \quad ; k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$$

$$|w| = \sqrt[n]{Z}$$

$$\wedge v = \frac{\theta + 2\pi k}{n}$$

أي أن

$$w = \sqrt[n]{|Z|} \cdot e^{i\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)} \quad ; k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$$

وبالاستفادة من صيغة أولر يكون:

$$(*)\quad w = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\frac{\theta+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right]$$

وذلك لأنه كل من دالة الجيب ودالة التجيب هي دالة دورية ودورها 2π

حالة خاصة:

إذا كانت $z=1$ عندئذٍ $|z|=1$

$$\theta = Arg(1) = 0$$

$$\tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = n\pi$$

وبالتالي بالتعويض بالعلاقة (*) تكون الجذور النونية للعدد العقدي $z=1$ معطاة بالعلاقة:

$$w_n = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$$

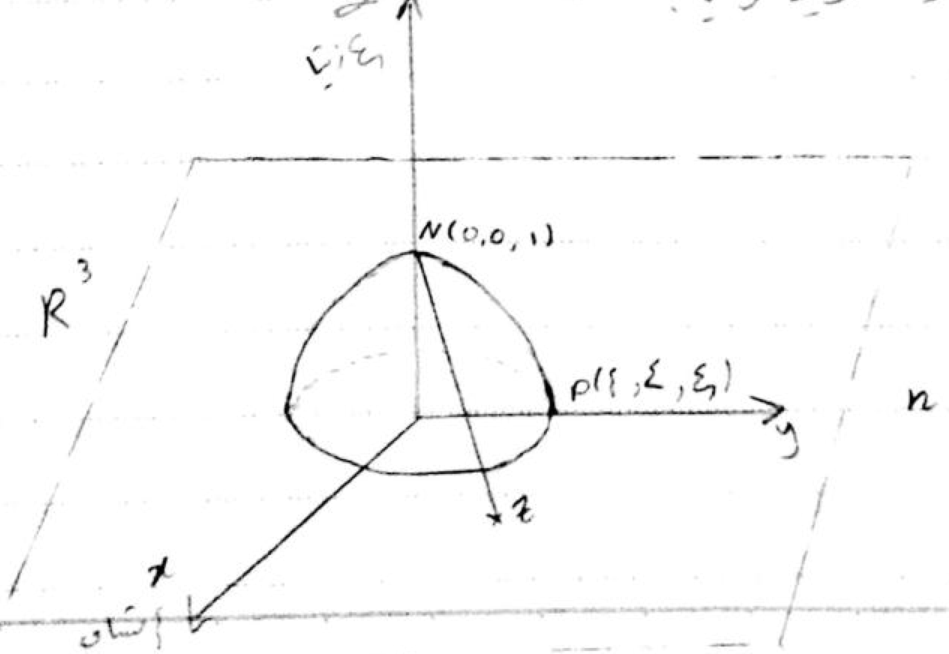
$$; k = 0, 1, 2, ---, n-1$$

مما يعني أنه الجذور النونية للعدد (1) هي:

$$1, w_n, w_n^2, \ldots, w_n^{n-1}$$

وهذه الجذور تقع على محيط الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها يساوي الواحد.

الإسقاط الاستريوغرافي:



نرسم كرة مركزها عند الإحداثيات ونصف قطرها يساوي الواحد عندئذٍ
نقطة تقاطع هذه الكرة مع المحور العمودي على المستوي نسميها N أو
القطب الشمالي وتكون إحداثيات هذه النقطة $(0,0,1)$
وحيث أن المستوي العقدي $xoyz$ يمر من دائرة الاستواء لهذه الكرة
عندئذٍ أي نقطة من نقاط المستوي العقدي (y,x) يقابلها نقطة واحدة
وواحدة فقط من سطح كرة ريمان وإذا كانت z نقطة من المستوي
العقدي حيث أن:

$$|z|>1 \quad \text{(خارج دائرة الاستواء)}$$

نصل بين N, z عندئذٍ هذا المستقيم سوف يقطع سطح كرة ريمان
بنقطة $P(أ, ع, ج)$
أما إذا كانت النقطة z تقع داخل دائرة خط الاستواء فإن النقطة المناظرة
لها من سطح كرة ريمان سوف تقع بالنصف السفلي من كرة ريمان.
أما إذا كانت النقطة z على دائرة خط الاستواء فالنقطة المناظرة لها
هي z نفسها.
لإيجاد العلاقات بين النقطة z ومسقطها P :

$$\overrightarrow{Nz} = \left((x-0)\vec{i} + (y-0)\vec{j} + (0-1)\vec{k}\right)$$
$$= x\vec{i} + y\vec{j} - \vec{k}$$
$$\overrightarrow{NP} = أ\,\vec{i} + ع\,\vec{j} + (ج-1)\vec{k}$$

وبالاستفادة من شرط التوازي يكون:

$$\frac{أ}{x} = \frac{ع}{y} = \frac{ج-1}{-1} = \lambda \quad \text{ثابت}$$

من التناسب الأول والثالث نجد أنه:

$$x = \frac{أ}{1-ج}$$

ومن التناسب الثاني والثالث نجد أنه:

$$y = \frac{ع}{1-ج}$$

وبالتالي فإنه :

$$Z = \frac{\text{أ}}{1-\text{عـ}} + i\,\frac{\text{ع}}{1-\text{عـ}}$$

هاتين العلاقتين تنقلنا من نقطة معلومة من سطح كرة ريمان إلى العدد المناظر لها بالمستوي العقدي.

نعلم أنه معادلة كرة ريمان بالفضاء R^3 هي :

$$\text{أ}^2 + \text{ع}^2 + \text{عـ}^2 = 1$$

لكن من التناسب السابق نجد أنه :

$$\text{أ} = \lambda x \quad , \text{ع} = \lambda y \quad , \text{عـ} = 1 - \lambda$$

نعوض من هذه العلاقات في معادلة الكرة فنجد أنه :

$$\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + (1-\lambda)^2 = 1$$

$$\lambda^2 (x^2 + y^2 + 1) - 2\lambda = 0$$

ومنه فإنه :

$$\lambda (x^2 + y^2 + 1) = 2$$

أي أنه :

$$\lambda = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}$$

ومنه فإنه :

$$\text{أ} = \frac{2x}{x^2+y^2+1} \quad , \text{ع} = \frac{2y}{x^2+y^2+1}$$

$$\text{أ} = 1 - \frac{2}{x^2+y^2+1} \quad , \text{عـ} = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$$

وتلك العلاقات تؤدي إلى :

$$\text{أ} = \frac{Z + \bar{Z}}{|Z|^2 + 1}$$

$$\eta = \frac{z - \bar{z}}{\frac{i}{|z|^2+1}} = i\,\frac{\bar{z} - z}{|z|^2+1}$$

$$\zeta = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$$

وهذه العلاقات تنقلنا من سطح كرة ريمان إلى المستوي العقدي ونجد أن المستقيمات التي تشترك مع سطح كرة ريمان من نقطة واحدة وهي القطب الشمالي N هي مستقيمات مماسة لسطح كرة ريمان كل مستقيم من هذه المستقيمات المماسة يلتقي مع المستوي xoy من نقطة هي اللانهاية لذلك اعتبر ريمان بأن نقطة القطب الشمالي N هي النقطة المناظرة لنقطة اللانهاية من المستوي العقدي وإذا أضفنا نقطة اللانهاية إلى المستوي العقدي Z عندئذٍ ندعو هذا المستوي بالمستوي العقدي الممتد أو الموسع.

أمثلة :

1. ليكن لدينا العدد العقدي :

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}$$

أوجد النقطة المناظرة لهذا العدد العقدي من سطح كرة ريمان ؟

الحل:

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \frac{2x}{x^2+y^2+1} = \frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\eta &= \frac{2y}{x^2+y^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\zeta &= \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} = \frac{1-1}{2} = 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

2] أوجد النقطة المناظرة للعدد العقدي :

$$z = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

الحل:

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

$$أ = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{3}$$

$$ع = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{3}$$

$$ع = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} + 1} = -\frac{1}{3}$$

فالنقطة المناظرة

$$p\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

المناطق في المستوي العقدي :

1- الجوار :

لتكن z_0 نقطة ما من المستوي العقدي إن جوار هذه النقطة بالتعريف هو مجموعة النقاط z من المستوي العقدي التي تحقق المتراجحة التالية :

$$|z - z_0| < ع$$

أي هي مجموعة النقاط التي تقع في داخلية الدائرة وليس على محيط الدائرة التي مركزها النقطة z_0 ونصف قطرها ع .

أما الجوار اللانهاية فهو مجموعة النقاط z التي تحقق العلاقة :

$$|z - 0| = |z| > \frac{1}{ع}$$

Scanned by CamScanner

2- النقطة الداخلية:

لتكن S مجموعة من نقاط المستوي العقدي، نقول عن النقطة z_0 أنها نقطة داخلية لـ S إذا وجد جوار واحد على الأقل للنقطة z_0 جميع نقاطه من المجموعة S.

3- النقطة الخارجية:

لتكن S مجموعة ما من نقاط المستوي العقدي نقول عن النقطة z_0 أنها نقطة خارجية للمجموعة S إذا وفقط إذا وجد جوار واحد على الأقل للنقطة z_0 لا يحوي على أي نقطة من نقاط المجموعة S.

4- النقطة الحدودية:

S مجموعة ما من نقاط المستوي العقدي نقول عن النقطة z_0 أنها نقطة حدودية للمجموعة S إذا وفقط إذا كان كل جوار لهذه النقطة يحتوي على نقاط تنتمي إلى S ونقاط لا تنتمي إلى S.

5- المجموعة المفتوحة:

نقول عن المجموعة S أنها مجموعة مفتوحة إذا كانت وفقط إذا كانت جميع نقاطها داخلية.

6- المجموعة المغلقة:

نقول عن S أنها مجموعة مغلقة إذا احتوت على جميع نقاطها الحدودية وهناك من المستوي العقدي مجموعات ليست مغلقة وليست مفتوحة

مثال:

$$0<|z|\leq 1$$

7ـ المجموعة المترابطة:

نقول عن S أنها مجموعة مترابطة إذا كانت بإمكانها أن نصل بين أي نقطتين من نقاط هذه المجموعة بمسار مضلعي يقع بأكمله ضمن المجموعة.

8ـ النطاقات:

ندعو كل مجموعة مفتوحة مترابطة نطاق.

9ـ المنطقة:

هي نطاق يضم بعض أو جميع نقاطه الحدودية.

تمرين 1ـ صف هندسياً المحل الهندسي لمجموعة النقاط:

$$z = x + iy$$

والتي تحقق العلاقة: $|z - 2| = 4$

ثم أثبت ذلك تحليلياً.

الحل:

بما أن تعريف الدائرة هو مجموعة نقاط المستوي التي تبعد عن نقطة ثابتة بعداً ثابتاً فإن العلاقة المعطاة هي تمثيل معادلة لدائرة لأنه: الطرف الأيمن ثابت ويساوي 4 أما الطرف الأيسر يمثل البعد بين مجموعة نقاط المستوي $z = x + iy$ عن النقطة الثابتة $z_0 = 2$ لذلك العلاقة السابقة هي معادلة دائرة.

تحليلياً:

نعوض

$$|x + iy - 2| = 4 \Rightarrow |(x - 2) + iy| = 4$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 4$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 16$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

أي أن المعادلة هي معادلة دائرة مركزها (2,0) ونصف قطرها 4

تمرين 2 ـ صف هندسياً الحل الهندسي لمجموعة النقاط : $z = x+iy$
والتي تحقق العلاقة :

$$|z-i| + |z+2i| = 6$$

مؤيد إثباتك بالشكل التحليلي .

الحل :

نلاحظ أن العلاقة المعطاة طرفها الأيمن ثابت يساوي 6 أما الطرف الأيسر يمثل مجموع بعدي نقاط المستوى عن نقطتين ثابتتين هما :

$(0,2) \qquad (0,-2)$

وهذا هو تعريف القطع الناقص.

تحليلياً

$$|x+iy-2i| + |x+iy+2i| = 6$$

$$|x+(y-2)i| + |x+(y+2)i| = 6$$

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2} + \sqrt{x^2+(y+2)^2} = 6$$

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2} = 6-\sqrt{x^2+(y+2)^2}$$

نربع

$$x^2+y^2-4y = 36-12\sqrt{x^2+(y+2)^2} + x^2+y^2+4y+4$$

$$-8y-36 = -12\sqrt{x^2+(y+2)^2}$$

$$2y+9 = 3\sqrt{x^2+(y+2)^2}$$

$$4y^2 + 36y + 81 = 9[x^2 + y^2 + 4y + 4]$$

$$9x^2 + 5y^2 = 45$$

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

فهي معادلة قطع ناقص مركزه $(0,0)$ محوره المحور الشاقولي

ومحرقه النقطة الثابتة $(0,2)\ ,\ (0,-2)$

تمرين 3 - عين مجموعة النقاط التي تحقق المعادلة:

$$\operatorname{Im} Z^2 = 10$$

الحل: نفرض أنه

$$\Leftarrow \quad Z = x + iy$$

$$Z^2 = x^2 + 2ixy - y^2$$

$$Z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

وبالتالي فإن

$$\operatorname{Im} Z = 2xy$$

$$2xy = 10 \quad \Rightarrow \quad xy = 5$$

وهي معادلة قطع زائد منسوب إلى مقاربيه يقعان في الربعين الأول والثالث.